

Invariants de déformation basés sur la physique pour matériaux fibreux

pour modéliser leurs comportements en grandes transformations

Guilhem Bles (guilhem.bles@ensta.fr)

—

en collaboration avec:

Wassim Dib (doctorant), Ali Tourabi, Arnaud Blaise, Didier Imbault (Univ. Grenoble Alpes),
Laure Civier (doctorante), Cédric Bain, Yann Marco (ENSTA), Peter Davies (IFREMER).

ENSTA, Institut Polytechnique de Paris, UMR CNRS 6027, IRDL, F-29200 Brest, France

Groupe de Travail Mécamat, Grandes Transformations, 10 avril 2025

Contents

- 1 Problématique
- 2 Proposition
- 3 Application aux tissus
- 4 Application aux fils et torons
- 5 Conclusion

Contents

- 1 Problématique
- 2 Proposition
- 3 Application aux tissus
- 4 Application aux fils et torons
- 5 Conclusion

Débuter par une loi Hyperélastique

Pour modéliser le comportement d'un matériau, le modélisateur peut commencer par une loi hyperélastique.

Débuter par une loi Hyperélastique

Pour modéliser le comportement d'un matériau, le modélisateur peut commencer par une loi hyperélastique.

Le premier et second principe de la thermodynamique seront respectés (même en grandes transformations). Ce qui est bien.

Débuter par une loi Hyperélastique

Pour modéliser le comportement d'un matériau, le modélisateur peut commencer par une loi hyperélastique.

Le premier et second principe de la thermodynamique seront respectés (même en grandes transformations). Ce qui est bien.

De la viscosité, de la plasticité, de l'endommagement peuvent être ajoutées par la suite.

Débuter par une loi Hyperélastique

Pour modéliser le comportement d'un matériau, le modélisateur peut commencer par une loi hyperélastique.

Le premier et second principe de la thermodynamique seront respectés (même en grandes transformations). Ce qui est bien.

De la viscosité, de la plasticité, de l'endommagement peuvent être ajoutées par la suite.

Le principe : l'énergie de l'élasticité est un potentiel, une fonction de variables de déformation :

$$W(\theta, \text{variables de défo.}) \quad (1)$$

Débuter par une loi Hyperélastique

Pour modéliser le comportement d'un matériau, le modélisateur peut commencer par une loi hyperélastique.

Le premier et second principe de la thermodynamique seront respectés (même en grandes transformations). Ce qui est bien.

De la viscosité, de la plasticité, de l'endommagement peuvent être ajoutées par la suite.

Le principe : l'énergie de l'élasticité est un potentiel, une fonction de variables de déformation :

$$W(\theta, \text{variables de défo.}) \quad (1)$$

A partir de cela uniquement, la contrainte, i.e. la loi de comportement, peut être déduite entièrement.

Débuter par une loi Hyperélastique

Pour modéliser le comportement d'un matériau, le modélisateur peut commencer par une loi hyperélastique.

Le premier et second principe de la thermodynamique seront respectés (même en grandes transformations). Ce qui est bien.

De la viscosité, de la plasticité, de l'endommagement peuvent être ajoutées par la suite.

Le principe : l'énergie de l'élasticité est un potentiel, une fonction de variables de déformation :

$$W(\theta, \text{variables de défo.}) \quad (1)$$

A partir de cela uniquement, la contrainte, i.e. la loi de comportement, peut être déduite entièrement.

Donc, tout est dans le choix pertinent de :

- ① ce potentiel (la fonction W),
- ② les variables de déformation.

Les mathématiques nous enseignent que

Pour un matériau isotrope

Les mathématiques nous enseignent que

Pour un matériau isotrope

Pour les variables de déformation,
un jeu de 3 invariants d'un tenseur de déformation suffit, comme ceux-ci, par exemple :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad \left(\text{où } \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right) \quad (2)$$

(Une question aux mathématiciens dans la salle : condition sur les 3 invariants ; indépendants ?)

Les mathématiques nous enseignent que

Pour un matériau isotrope

Pour les variables de déformation,
un jeu de 3 invariants d'un tenseur de déformation suffit, comme ceux-ci, par exemple :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad \left(\text{où } \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right) \quad (2)$$

(Une question aux mathématiciens dans la salle : condition sur les 3 invariants ; indépendants ?)

Pour un matériau isotrope-transverse

Les mathématiques nous enseignent que

Pour un matériau isotrope

Pour les variables de déformation,
un jeu de 3 invariants d'un tenseur de déformation suffit, comme ceux-ci, par exemple :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad \left(\text{où } \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right) \quad (2)$$

(Une question aux mathématiciens dans la salle : condition sur les 3 invariants ; indépendants ?)

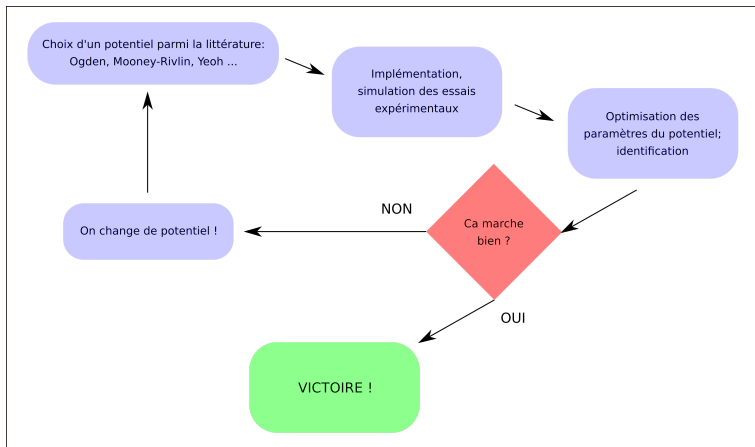
Pour un matériau isotrope-transverse

Pour les variables de déformation,
un jeu de 5 invariants suffit (Boehler, Spencer and Betten, 1987), comme ceux-ci, par exemple :

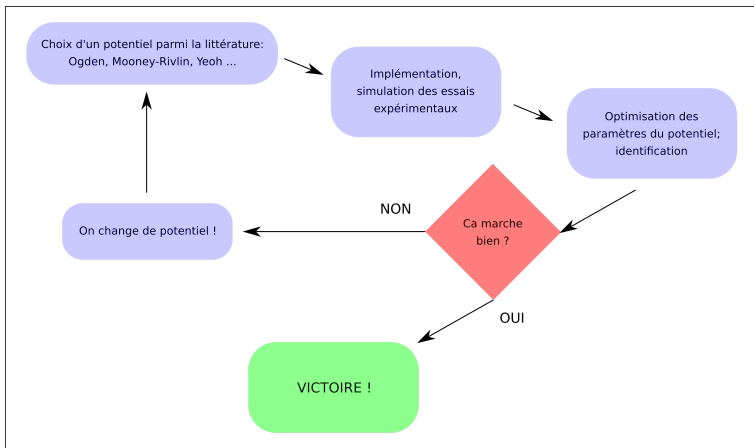
$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (3)$$

$$I_4 = \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{M}}_1 \quad I_5 = (\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}) : \tilde{\mathbf{M}}_1 \quad (4)$$

Pour trouver le bon potentiel, on part à la pêche



Pour trouver le bon potentiel, on part à la pêche



L'ensemble des possibilités de potentiel est immense, donc il faut avoir de la chance !

Pour pouvoir avancer, on peut

On parie sur des phénomènes mécaniques découplés :

$$W(I_1, I_2, I_3) = A(\varepsilon_a) + B(\varepsilon_b) + C(\varepsilon_c) \quad (5)$$

où ε_a , ε_b et ε_c sont des variables de déformation qui sollicitent des phénomènes mécaniques découplés.

Pour pouvoir avancer, on peut

On parie sur des phénomènes mécaniques découplés :

$$W(I_1, I_2, I_3) = A(\varepsilon_a) + B(\varepsilon_b) + C(\varepsilon_c) \quad (5)$$

où ε_a , ε_b et ε_c sont des variables de déformation qui sollicitent des phénomènes mécaniques découplés.

Alors la recherche du potentiel en est simplifiée.

Par exemple

- ① Le modélisateur apprend à connaître son matériau :
 - ① Observation du matériau (à l'œil nu ou au microscope)
 - ② Recherche bibliographique
 - ③ Essais mécaniques préliminaires

Par exemple

- ① Le modélisateur apprend à connaître son matériau :
 - ① Observation du matériau (à l'œil nu ou au microscope)
 - ② Recherche bibliographique
 - ③ Essais mécaniques préliminaires
- ② Le modélisateur identifie des phénomènes mécaniques :
 - ① Il liste des modes de déformations
 - ② A chaque mode, des phénomènes mécaniques découplés de ceux des autres modes

Par exemple

- ① Le modélisateur apprend à connaître son matériau :
 - ① Observation du matériau (à l'œil nu ou au microscope)
 - ② Recherche bibliographique
 - ③ Essais mécaniques préliminaires
- ② Le modélisateur identifie des phénomènes mécaniques :
 - ① Il liste des modes de déformations
 - ② A chaque mode, des phénomènes mécaniques découplés de ceux des autres modes

Matériaux métalliques

Changement de volume $\Rightarrow$ élasticité

Distorsion à volume constant $\Rightarrow$ élasticité et dislocations ; élasto-plasticité !

Par exemple

- ① Le modélisateur apprend à connaître son matériau :
 - ① Observation du matériau (à l'œil nu ou au microscope)
 - ② Recherche bibliographique
 - ③ Essais mécaniques préliminaires
- ② Le modélisateur identifie des phénomènes mécaniques :
 - ① Il liste des modes de déformations
 - ② A chaque mode, des phénomènes mécaniques découplés de ceux des autres modes

Matériaux métalliques

Changement de volume $\Rightarrow$ élasticité

Distorsion à volume constant $\Rightarrow$ élasticité et dislocations ; élasto-plasticité !

Elastomères amorphes

Changement de volume $\Rightarrow$ élasticité à forte rigidité (fort module/volume constant)

Distorsion à volume constant $\Rightarrow$ élasticité souple et glissement des macrochaînes les unes contre les autres ; visco-élasticité !

Alors une question survient

Pour chaque mode de déformation identifié :

- changement de volume
- distorsion à volume constant
- ...



Quelles variables de déformation ?

Ou bien

Quels invariants ?

- $\text{Tr} \tilde{\epsilon}$
- $\text{Sec} \tilde{\epsilon}$
- $\text{Det} \tilde{\epsilon}$
- $\text{Tr}(\tilde{\epsilon} \cdot \tilde{\epsilon})$
- ...

Matériaux isotropes en grandes transformations

Choix des invariants :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (6)$$

Matériaux isotropes en grandes transformations

Choix des invariants :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (6)$$

Ce choix est peu pertinent car lors de l'application d'un changement de volume seul $k\tilde{\mathbf{I}}$ à une configuration déformée, les élongations principales $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ deviennent

$$\lambda'_1 = k\lambda_1 \quad \lambda'_2 = k\lambda_2 \quad \lambda'_3 = k\lambda_3 \quad (7)$$

Matériaux isotropes en grandes transformations

Choix des invariants :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (6)$$

Ce choix est peu pertinent car lors de l'application d'un changement de volume seul $k\tilde{\mathbf{I}}$ à une configuration déformée, les élongations principales $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ deviennent

$$\lambda'_1 = k\lambda_1 \quad \lambda'_2 = k\lambda_2 \quad \lambda'_3 = k\lambda_3 \quad (7)$$

et ces invariants évoluent ainsi

$$I'_1 = k^2 I_1 \quad I'_2 = k^4 I_2 \quad I'_3 = k^6 I_3 \quad (8)$$

Ces trois invariants sont impactés par un changement de volume seul.

Matériaux isotropes en grandes transformations

Choix des invariants :

$$I_1 = \text{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_2 = \text{Sec} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \text{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (6)$$

Ce choix est peu pertinent car lors de l'application d'un changement de volume seul $k\tilde{\mathbf{I}}$ à une configuration déformée, les élongations principales $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ deviennent

$$\lambda'_1 = k\lambda_1 \quad \lambda'_2 = k\lambda_2 \quad \lambda'_3 = k\lambda_3 \quad (7)$$

et ces invariants évoluent ainsi

$$I'_1 = k^2 I_1 \quad I'_2 = k^4 I_2 \quad I'_3 = k^6 I_3 \quad (8)$$

Ces trois invariants sont impactés par un changement de volume seul.

Ainsi, ces invariants ne découplent pas les modes suivants :

Changement de volume $\Rightarrow I_1, I_2, I_3$ évoluent (Pas OK)

Distorsion à volume constant $\Rightarrow I_1, I_2$ évoluent et I_3 constant (OK)

Matériaux isotropes en grandes transformations

Criscione et al. (2000) proposent les invariants suivants :

$$K_1 = \text{Tr} \widetilde{\mathbf{LnV}} \quad K_2 = \sqrt{\widetilde{\mathbf{LnV}} : \widetilde{\mathbf{LnV}}} \quad K_3 = 3\sqrt{6} \text{Det} \widetilde{\Phi} \quad (9)$$

où

$$\widetilde{\mathbf{LnV}} = \frac{1}{3} K_1 \widetilde{\mathbf{I}} + K_2 \widetilde{\Phi} \quad (10)$$

Matériaux isotropes en grandes transformations

Criscione et al. (2000) proposent les invariants suivants :

$$K_1 = \text{Tr} \widetilde{\mathbf{LnV}} \quad K_2 = \sqrt{\widetilde{\mathbf{LnV}} : \widetilde{\mathbf{LnV}}} \quad K_3 = 3\sqrt{6} \text{Det} \widetilde{\Phi} \quad (9)$$

où

$$\widetilde{\mathbf{LnV}} = \frac{1}{3} K_1 \widetilde{\mathbf{I}} + K_2 \widetilde{\Phi} \quad (10)$$

Ces invariants découpent les modes suivants :

Changement de volume $\Rightarrow K_1$ évolue et K_2, K_3 constants (OK)

Distorsion à volume constant $\Rightarrow K_2, K_3$ évoluent et K_1 constant (OK)

Matériaux isotropes en grandes transformations

Criscione et al. (2000) proposent les invariants suivants :

$$K_1 = \text{Tr} \widetilde{\mathbf{LnV}} \quad K_2 = \sqrt{\widetilde{\mathbf{LnV}} : \widetilde{\mathbf{LnV}}} \quad K_3 = 3\sqrt{6} \text{Det} \widetilde{\Phi} \quad (9)$$

où

$$\widetilde{\mathbf{LnV}} = \frac{1}{3} K_1 \widetilde{\mathbf{I}} + K_2 \widetilde{\Phi} \quad (10)$$

Ces invariants découpent les modes suivants :

Changement de volume $\Rightarrow K_1$ évolue et K_2, K_3 constants (OK)

Distorsion à volume constant $\Rightarrow K_2, K_3$ évoluent et K_1 constant (OK)

Signification physique de ces invariants :

K_1 changement de volume

K_2 intensité de la distorsion à volume constant

K_3 type de la distorsion à volume constant (0 : cisaillement, 1 : traction, -1 : compression)

Le point dur est alors

On parie sur des phénomènes mécaniques découplés :

$$W(I_1, I_2, I_3) = A(\varepsilon_a) + B(\varepsilon_b) + C(\varepsilon_c) \quad (11)$$

où ε_a , ε_b et ε_c sont des variables/invariants de déformation qui sollicitent des phénomènes mécaniques découplés.

Le point dur est alors

On parie sur des phénomènes mécaniques découplés :

$$W(I_1, I_2, I_3) = A(\varepsilon_a) + B(\varepsilon_b) + C(\varepsilon_c) \quad (11)$$

où ε_a , ε_b et ε_c sont des variables/invariants de déformation qui sollicitent des phénomènes mécaniques découplés.

On est tous (ou du moins beaucoup) d'accord là-dessus, mais la difficulté est :

Le point dur est alors

On parie sur des phénomènes mécaniques découplés :

$$W(I_1, I_2, I_3) = A(\varepsilon_a) + B(\varepsilon_b) + C(\varepsilon_c) \quad (11)$$

où ε_a , ε_b et ε_c sont des variables/invariants de déformation qui sollicitent des phénomènes mécaniques découplés.

On est tous (ou du moins beaucoup) d'accord là-dessus, mais la difficulté est :

Comment choisir et définir exactement ces variables/invariants de déformation pertinentes ?

Le point dur est alors

On parie sur des phénomènes mécaniques découplés :

$$W(I_1, I_2, I_3) = A(\varepsilon_a) + B(\varepsilon_b) + C(\varepsilon_c) \quad (11)$$

où ε_a , ε_b et ε_c sont des variables/invariants de déformation qui sollicitent des phénomènes mécaniques découplés.

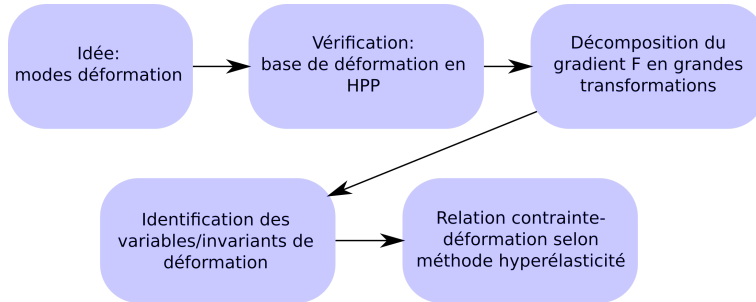
On est tous (ou du moins beaucoup) d'accord là-dessus, mais la difficulté est :

Comment choisir et définir exactement ces variables/invariants de déformation pertinentes ?
A la fois mécaniquement pertinentes et mathématiquement (Grandes Transformations) rigoureuses ?

Contents

- 1 Problématique
- 2 Proposition
- 3 Application aux tissus
- 4 Application aux fils et torons
- 5 Conclusion

Méthode proposée



Idée des modes de déformation correcte ?

Idée des modes de déformation correcte ?

Est-ce que les modes proposés sont *libres* ?

Un mode de déformation ne serait-il pas une combinaison des autres modes ?
Est-ce que l'on a bien choisi des modes de déformation découplés ?

Idée des modes de déformation correcte ?

Est-ce que les modes proposés sont *libres* ?

Un mode de déformation ne serait-il pas une combinaison des autres modes ?

Est-ce que l'on a bien choisi des modes de déformation découplés ?

Est-ce que les modes proposés sont *générateurs* ?

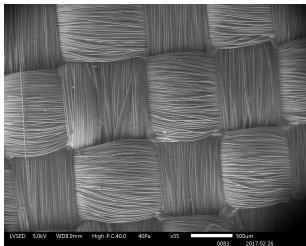
Toute déformation quelconque du matériau peut-elle être obtenue par une combinaison des modes identifiés ?

Est-ce que l'on a pas oublié un mode de déformation ?

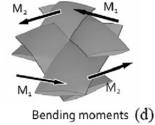
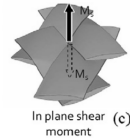
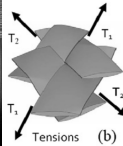
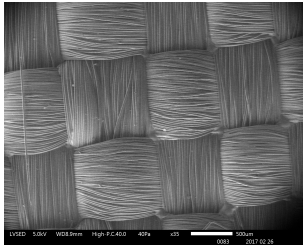
Contents

- 1 Problématique
- 2 Proposition
- 3 Application aux tissus**
- 4 Application aux fils et torons
- 5 Conclusion

Exemple d'un tissu : idée des modes de déformation

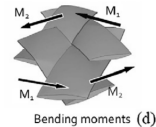
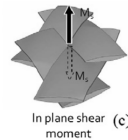
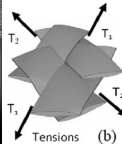
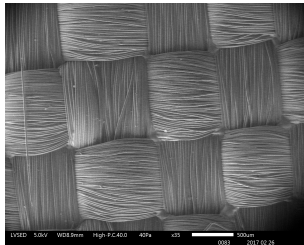


Exemple d'un tissu : idée des modes de déformation



Boisse et al. (2011)

Exemple d'un tissu : idée des modes de déformation



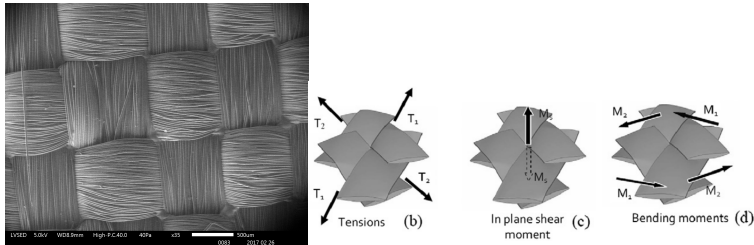
Boisse et al. (2011)

Modes de déformation et phénomènes mécaniques

Elongation dans la direction chaîne traction des fils de chaîne, réduction de son embovage

Elongation dans la direction trame traction des fils de trame, réduction de son embovage

Exemple d'un tissu : idée des modes de déformation



Boisse et al. (2011)

Modes de déformation et phénomènes mécaniques

Elongation dans la direction chaîne traction des fils de chaîne, réduction de son embovage

Elongation dans la direction trame traction des fils de trame, réduction de son embovage

Changement d'angle chaîne-trame rotation au contact chaîne-trame (friction), la surface carrée de contact entre des fils de chaîne et de trame évolue vers un losange (rigidité non-linéaire)

Vérification des modes de déformation en HPP

Posons $\vec{e}_c$ et $\vec{e}_t$ deux vecteurs unitaires dans la direction des chaînes et des trames.

Vérification des modes de déformation en HPP

Posons $\vec{e}_c$ et $\vec{e}_t$ deux vecteurs unitaires dans la direction des chaînes et des trames.

Elongation dans la direction chaîne le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Vérification des modes de déformation en HPP

Posons $\vec{e}_c$ et $\vec{e}_t$ deux vecteurs unitaires dans la direction des chaînes et des trames.

Elongation dans la direction chaîne le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Elongation dans la direction trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Vérification des modes de déformation en HPP

Posons $\vec{e}_c$ et $\vec{e}_t$ deux vecteurs unitaires dans la direction des chaînes et des trames.

Elongation dans la direction chaîne le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Elongation dans la direction trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Changement d'angle chaîne-trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Vérification des modes de déformation en HPP

Posons $\vec{e}_c$ et $\vec{e}_t$ deux vecteurs unitaires dans la direction des chaînes et des trames.

Elongation dans la direction chaîne le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Elongation dans la direction trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Changement d'angle chaîne-trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Ces trois tenseurs sont :

- ① libres
- ② générateurs

dans l'espace vectoriel des tenseurs de déformation membranaire du tissu.

Vérification des modes de déformation en HPP

Posons $\vec{e}_c$ et $\vec{e}_t$ deux vecteurs unitaires dans la direction des chaînes et des trames.

Elongation dans la direction chaîne le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Elongation dans la direction trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Changement d'angle chaîne-trame le tenseur de déformation HPP associé est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_c, \vec{e}_t)}$

Ces trois tenseurs sont :

- ① libres
- ② générateurs

dans l'espace vectoriel des tenseurs de déformation membranaire du tissu.



Décomposition du gradient de la transformation

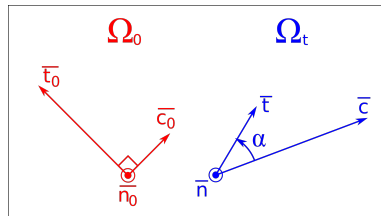
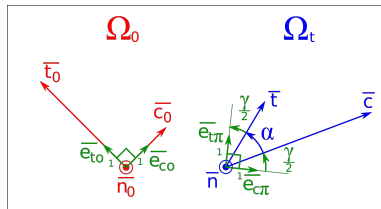


Figure : Configurations de référence Ω_0 et déformée Ω_t pour les vecteurs matériels $\vec{c}$ et $\vec{t}$ le long des chaînes et trames d'un tissu.

On part de cette expression de $\tilde{\mathbf{F}}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\vec{c} \otimes \vec{c}_o}{c_o^2} + \frac{\vec{t} \otimes \vec{t}_o}{t_o^2} + \vec{n} \otimes \vec{n}_o \quad (12)$$

Décomposition du gradient de la transformation



On arrive à cette expression de $\tilde{\mathbf{F}}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}}_\pi \cdot \tilde{\mathbf{U}}_\alpha \cdot \tilde{\mathbf{U}}_w \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_w = \begin{bmatrix} \frac{c}{c_o} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{t_o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n})} \quad \tilde{\mathbf{U}}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n}_o)} \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_\pi \cdot (\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n}_o) = (\vec{e}_{c\pi}, \vec{e}_{t\pi}, \vec{n}) \quad (15)$$

Identification des variables/invariants de déformation

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{\mathbf{R}}_{\pi} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{\alpha} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_w \quad (16)$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_w = \begin{bmatrix} \frac{c}{c_o} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{t_o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n})} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n}_o)} \quad (17)$$

Identification des variables/invariants de déformation

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{\mathbf{R}}_{\pi} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{\alpha} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_w \quad (16)$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_w = \begin{bmatrix} \frac{c}{c_o} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{t_o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n})} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n}_o)} \quad (17)$$

Elongation dans la direction chaîne :

$$\frac{c}{c_o} = \sqrt{\widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{co} \otimes \vec{e}_{co})} \quad (18)$$

Elongation dans la direction trame :

$$\frac{t}{t_o} = \sqrt{\widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{to} \otimes \vec{e}_{to})} \quad (19)$$

Identification des variables/invariants de déformation

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{\mathbf{R}}_{\pi} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{\alpha} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_w \quad (16)$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_w = \begin{bmatrix} \frac{c}{c_o} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{t_o} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n})} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{co}, \vec{e}_{to}, \vec{n}_o)} \quad (17)$$

Elongation dans la direction chaîne :

$$\frac{c}{c_o} = \sqrt{\widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{co} \otimes \vec{e}_{co})} \quad (18)$$

Elongation dans la direction trame :

$$\frac{t}{t_o} = \sqrt{\widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{to} \otimes \vec{e}_{to})} \quad (19)$$

Changement d'angle chaîne-trame :

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\arccos(\vec{e}_c \cdot \vec{e}_t)}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{\widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{co} \otimes \vec{e}_{to})}{\sqrt{\widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{co} \otimes \vec{e}_{co}) \widetilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{to} \otimes \vec{e}_{to})}} \right) \quad (20)$$

Relation contrainte-déformation

Invariants de déformation :

$$\varepsilon_c = \ln \frac{c}{c_o} \quad \varepsilon_t = \ln \frac{t}{t_o} \quad \varepsilon_{ct} = \frac{\gamma}{2} \quad (21)$$

Relation contrainte-déformation

Invariants de déformation :

$$\varepsilon_c = \ln \frac{c}{c_o} \quad \varepsilon_t = \ln \frac{t}{t_o} \quad \varepsilon_{ct} = \frac{\gamma}{2} \quad (21)$$

Energie libre :

$$\forall(\theta, \tilde{\mathbf{F}}) \quad dm \, \psi(\theta, \varepsilon_c, \varepsilon_t, \varepsilon_{ct}) = dm_c W_c(\varepsilon_c) + dm_t W_t(\varepsilon_t) + dm W_{ct}(\varepsilon_{ct}) \quad (22)$$

Relation contrainte-déformation

Invariants de déformation :

$$\varepsilon_c = \ln \frac{c}{c_o} \quad \varepsilon_t = \ln \frac{t}{t_o} \quad \varepsilon_{ct} = \frac{\gamma}{2} \quad (21)$$

Energie libre :

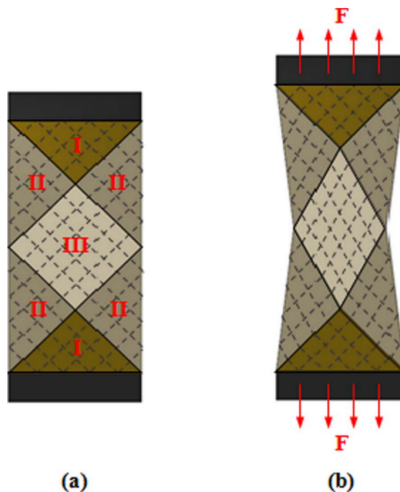
$$\forall(\theta, \tilde{\mathbf{F}}) \quad dm \psi(\theta, \varepsilon_c, \varepsilon_t, \varepsilon_{ct}) = dm_c W_c(\varepsilon_c) + dm_t W_t(\varepsilon_t) + dm W_{ct}(\varepsilon_{ct}) \quad (22)$$

Contrainte massique :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} = & \frac{\bar{\rho}_o^c}{\bar{\rho}_o} W'_c(\varepsilon_c) (\vec{e}_c \otimes \vec{e}_c) + \frac{\bar{\rho}_o^t}{\bar{\rho}_o} W'_t(\varepsilon_t) (\vec{e}_t \otimes \vec{e}_t) \\ & + \frac{W'_{ct}(\varepsilon_{ct})}{2} \left(e^{\vec{t} \times} \otimes \vec{e}_c + e^{\vec{c} \times} \otimes \vec{e}_t \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$(\vec{c}^{\times}, \vec{t}^{\times}, \vec{n})$ est la base duale de $(\vec{c}, \vec{t}, \vec{n})$.

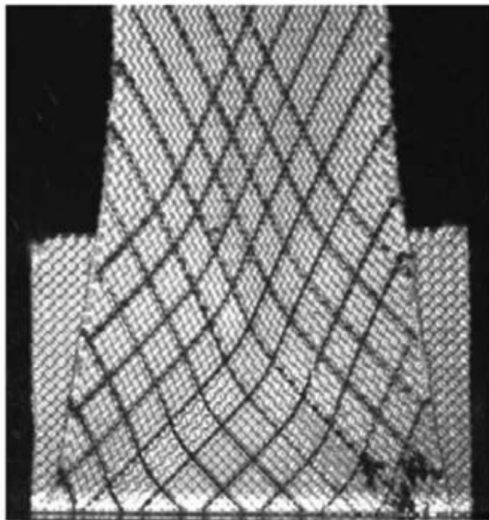
Exemple de la Traction sur un tissu à 45 degrés des fils



(Hosseini et al., 2018)

Fig. 1. A plain woven sample (a) at the beginning of BET, (b) during BET.

Exemple de la Traction sur un tissu à 45 degrés des fils



(King, Jearanaisilawong and Socrate, 2005)

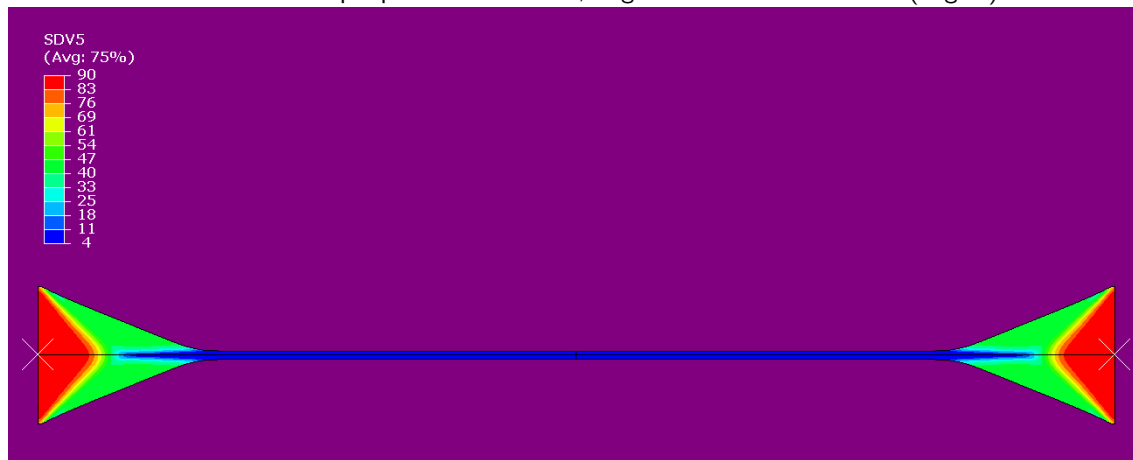
Exemple de la Traction sur un tissu à 45 degrés des fils

Simulation numérique par éléments finis (Dib, 2014) ; angle entre chaîne et trame (degrés) :



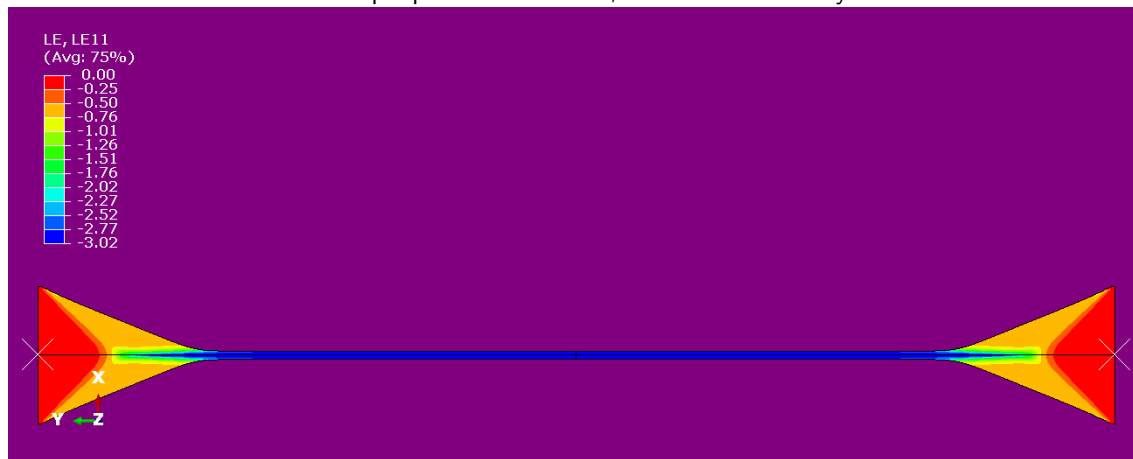
Exemple de la Traction sur un tissu à 45 degrés des fils

Simulation numérique par éléments finis ; angle entre chaîne et trame (degrés) :



Exemple de la Traction sur un tissu à 45 degrés des fils

Simulation numérique par éléments finis ; déformation Hencky transverse :



Contents

- 1 Problématique
- 2 Proposition
- 3 Application aux tissus
- 4 Application aux fils et torons**
- 5 Conclusion

Matériaux : fil, toron



Matériau : fil



Fig. 1. Different scales for a woven composite reinforcement.

A.Charmetant et al., *Composite Science and Technology*, 71 (2011) 1623-1631

Matériau : fil

Fil ou mèche (Charmetant, Vidal-Sallé and Boisse, 2011) :

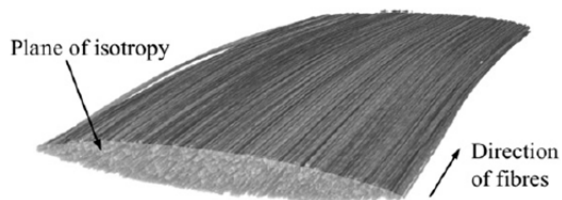
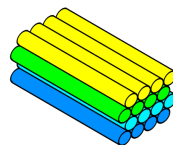


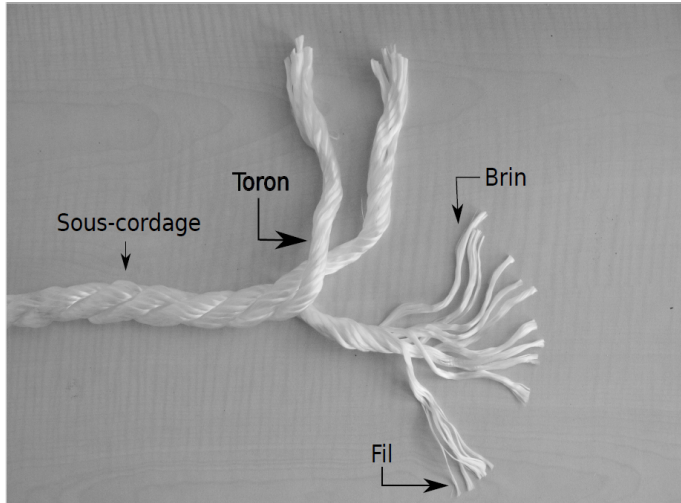
Fig. 2. Transverse isotropy of the yarn in a textile reinforcement. X-ray tomography imaging.

Un fil peut être modélisé comme un volume d'un milieu continu constitué d'un matériau, qui est un faisceau de fibres les unes contre les autres :



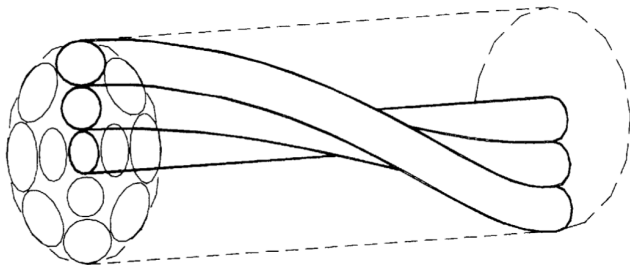
Matériau : toron

Cordage formé de 3 torons (Civier, 2023) :

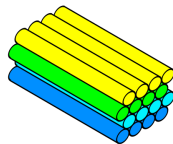


Matériau : toron

Schéma d'un toron formé de fils (ou brins) en hélice
(Leech, 2002) :

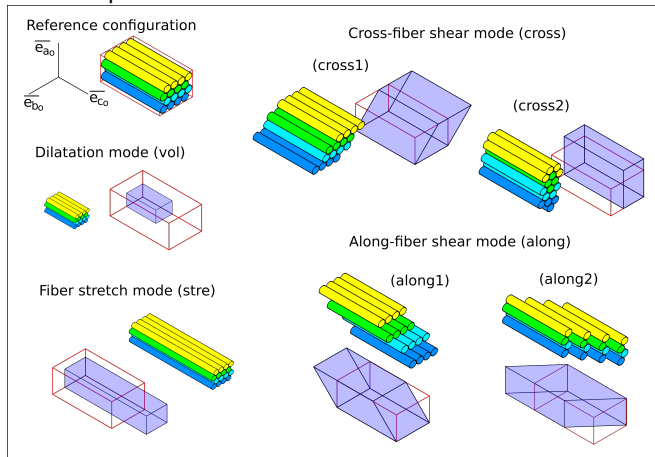


Un toron peut être modélisé
comme un volume d'un milieu
continu constitué d'un matériau,
qui est un faisceau de fils les uns
contre les autres :



Invariants physiques pour les matériaux isotropes-transverses

Décomposition de la déformation en différents modes :



(Criscione, Douglas and Hunter, 2001; Civial, 2023)

Vérification des modes de déformations en HPP

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})}$$

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (24)$$

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathbf{D}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} & \widetilde{\mathbf{D}}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \\
 \widetilde{\mathbf{D}}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (24)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (25)$$

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (24)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (25)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})}$$

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (24)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (25)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (26)$$

Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (24)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (25)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (26)$$

Ce jeu de tenseurs est une base orthonormée de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 symétriques, i.e. de l'espace des déformations HPP.

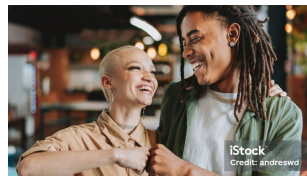
Vérification des modes de déformations en HPP

$$\widetilde{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (24)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (25)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{D}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_{ao}, \vec{e}_{bo}, \vec{e}_{co})} \quad (26)$$

Ce jeu de tenseurs est une base orthonormée de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 symétriques, i.e. de l'espace des déformations HPP.



Décomposition du gradient de la transformation

Criscione, Douglas and Hunter (2001) ont décomposé le gradient ainsi :

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{\mathbf{Q}} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{vol} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{stre} \cdot \widetilde{\mathbf{U}}_{cross} \cdot \widetilde{\mathbf{F}}_{along} \quad (27)$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{stre} = \begin{bmatrix} \lambda_M^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_M^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_M \end{bmatrix}_{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{e}_{co})} \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{cross} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{e}_{co})} \quad (28)$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{vol} = \sqrt[3]{J} \widetilde{\mathbf{I}} \quad \widetilde{\mathbf{F}}_{along} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \psi \cos \gamma & \psi \sin \gamma & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{e}_{co})} \quad (29)$$

Identification des variables/invariants de déformation

Criscione, Douglas and Hunter (2001) en ont déduit les invariants suivants :

Changement de volume $\beta_1 = \frac{\ln I_3}{2}$ (mode *vol*)

Elongation des fibres $\beta_2 = \frac{3}{4} \ln I_4 - \frac{1}{4} \ln I_3$ (mode *stre*)

Cisaillements dans le plan transverse $\beta_3 = \operatorname{argcosh} \left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} \right)$ (mode *cross*)

Cisaillements dans la direction des fibres $\beta_4 = \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1}$ (mode *along*)

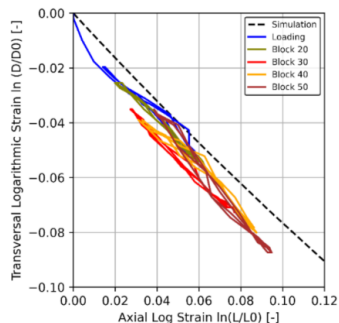
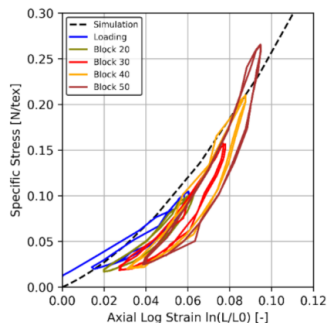
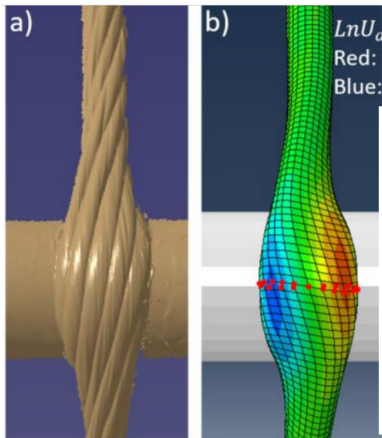
où les invariants classiques sont définis ainsi :

$$I_1 = \operatorname{Tr} \tilde{\mathbf{C}} \quad I_3 = \operatorname{Det} \tilde{\mathbf{C}} \quad (30)$$

$$I_4 = \tilde{\mathbf{C}} : (\vec{e}_{co} \otimes \vec{e}_{co}) \quad I_5 = (\tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{C}}) : (\vec{e}_{co} \otimes \vec{e}_{co}) \quad (31)$$

Exemple de simulation d'un toron

Thèse de Laure CIVIER (Civier, 2023) :

Tension on a single strand:
(Poisson's ratio = +1)

Exemple de simulation d'un toron en contact avec un axe

Quelques vidéos

Contents

- 1 Problématique
- 2 Proposition
- 3 Application aux tissus
- 4 Application aux fils et torons
- 5 Conclusion

Conclusion

Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

Conclusion

Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

- Les invariants mathématiques sans analyse mécanique du matériau : fortement limitant !

Conclusion

Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

- Les invariants mathématiques sans analyse mécanique du matériau : fortement limitant !
- Il est profitable d'aller chercher des invariants basés sur la mécanique du matériau ;

Conclusion

Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

- Les invariants mathématiques sans analyse mécanique du matériau : fortement limitant !
- Il est profitable d'aller chercher des invariants basés sur la mécanique du matériau ;
- En associant des modes de déformation à des phénomènes découplés.

Conclusion

Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

- Les invariants mathématiques sans analyse mécanique du matériau : fortement limitant !
- Il est profitable d'aller chercher des invariants basés sur la mécanique du matériau ;
- En associant des modes de déformation à des phénomènes découplés.
- Ces invariants *mécaniques* structurent fortement la loi de comportement ; ils apportent à eux seuls beaucoup de la mécanique du matériau.

Conclusion

Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

- Les invariants mathématiques sans analyse mécanique du matériau : fortement limitant !
- Il est profitable d'aller chercher des invariants basés sur la mécanique du matériau ;
- En associant des modes de déformation à des phénomènes découplés.
- Ces invariants *mécaniques* structurent fortement la loi de comportement ; ils apportent à eux seuls beaucoup de la mécanique du matériau.
- Une méthode est proposée, partant de l'intuition du modélisateur, elle arrive rigoureusement à définir des invariants *libres* et *générateurs*.

Conclusion

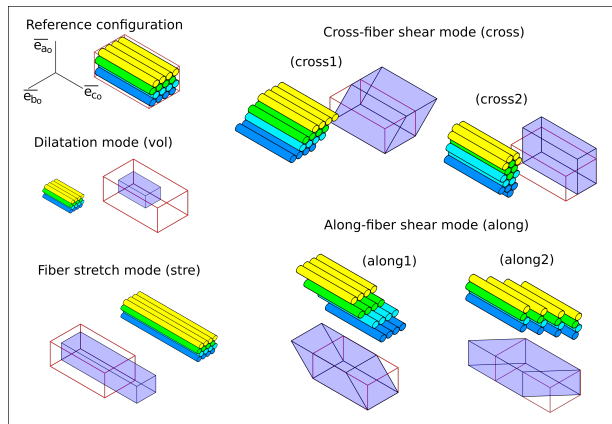
Pour la modélisation du comportement de matériaux en grandes transformations :

- Les invariants mathématiques sans analyse mécanique du matériau : fortement limitant !
- Il est profitable d'aller chercher des invariants basés sur la mécanique du matériau ;
- En associant des modes de déformation à des phénomènes découplés.
- Ces invariants *mécaniques* structurent fortement la loi de comportement ; ils apportent à eux seuls beaucoup de la mécanique du matériau.
- Une méthode est proposée, partant de l'intuition du modélisateur, elle arrive rigoureusement à définir des invariants *libres* et *générateurs*.
- Cette méthode apporte beaucoup pour la modélisation du comportement de matériaux textiles ; mais pourrait aussi apporter beaucoup aux matériaux souples du vivant.

Fin

Merci pour votre attention !

Avez-vous des questions ?



References I

- Boehler, J.P., Spencer, A.J.M. and Betten, J., 1987. *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM courses and lectures No. 292. Springer-Verlag Wien Gmbh.
- Boisse, P., Hamila, N., Vidal-Sallé, E. and Dumont, F., 2011. Simulation of wrinkling during textile composite reinforcement forming. influence of tensile, in-plane shear and bending stiffnesses. *Composites Science and Technology*, 71(5), pp.683–692.
- Charmetant, A., Vidal-Sallé, E. and Boisse, P., 2011. Hyperelastic modelling for mesoscopic analyses of composite reinforcements. *Composites Science and Technology*, 71, pp.1623–1631.
- Civier, L., 2023. *Caractérisation et modélisation de la fatigue et de la durabilité de ligne d'ancrages en polyamide pour les éoliennes offshore flottantes [characterization and modeling of fatigue and durability of polyamide mooring lines for floating offshore wind turbines]*. Ph.D. thesis. Written in English. Univ. Bretagne Loire, Engineering school ENSTA Bretagne, France.
- Criscione, J.C., Douglas, A.S. and Hunter, W.C., 2001. Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(4), pp.871–897.

References II

- Criscione, J.C., Humphrey, J.D., Douglas, A.S. and Hunter, W.C., 2000. An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(12), pp.2445–2465.
- Dib, W., 2014. *Comportement mécaniques de tissus à voiles, en fibres synthétiques, sous sollicitations biaxiales et déformation finie (mechanical behavior of synthetic-fiber sailclothes under biaxial loading and finite strain)*. Ph.D. thesis. Univ. de Grenoble, France.
- Hosseini, A., Kashani, M.H., Sassani, F., Milani, A. and Ko, F., 2018. Identifying the distinct shear wrinkling behavior of woven composite preforms under bias extension and picture frame tests. *Composite Structures*, 185, pp.764–773.
- King, M., Jearanaisilawong, P. and Socrate, S., 2005. A continuum constitutive model for the mechanical behavior of woven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp.3867–3896.
- Leech, C., 2002. The modelling of friction in polymer fibre ropes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp.621–643.
- Mandel, J., 1965. Generalisation de la theorie de plasticite de w. t. koiter. *International Journal of Solids and Structures*, 1(3), pp.273–295.

Voigt Mandel notation or tensor basis

Let $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ be an orthonormal basis. we may define an **orthonormal second-order tensor basis** $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{E}}_9)$, also called **$\widetilde{\mathbf{VM}}(\vec{e}_i)$** , of the **linear space of second-order tensors** :

$$\widetilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_9 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i}$$

Voigt Mandel notation or tensor basis

The components of any second-order tensor, in Voigt-Mandel basis $(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{E}}_9) = \widetilde{\mathbf{VM}}(\vec{e}_i)$, are

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \frac{A_{21}+A_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_{31}+A_{13}}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_{32}+A_{23}}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_{32}-A_{23}}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_{13}-A_{31}}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_{21}-A_{12}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{E}}_9) = \widetilde{\mathbf{VM}}(\vec{e}_i)} \quad (32)$$

Voigt Mandel notation or tensor basis

In the case of any **symmetric second-order tensor** (Voigt-Mandel notation (Mandel, 1965)),

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ A_{12} \cdot \sqrt{2} \\ A_{13} \cdot \sqrt{2} \\ A_{23} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}_{(\widetilde{\mathbf{E}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{E}}_9) = \widetilde{VM}(\vec{e}_i)} \quad (33)$$